1ª Olimpiada Nacional en

TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS

15-16 Octubre, 2015, Madrid, España

OTM2 2015

PROBLEMA 1.

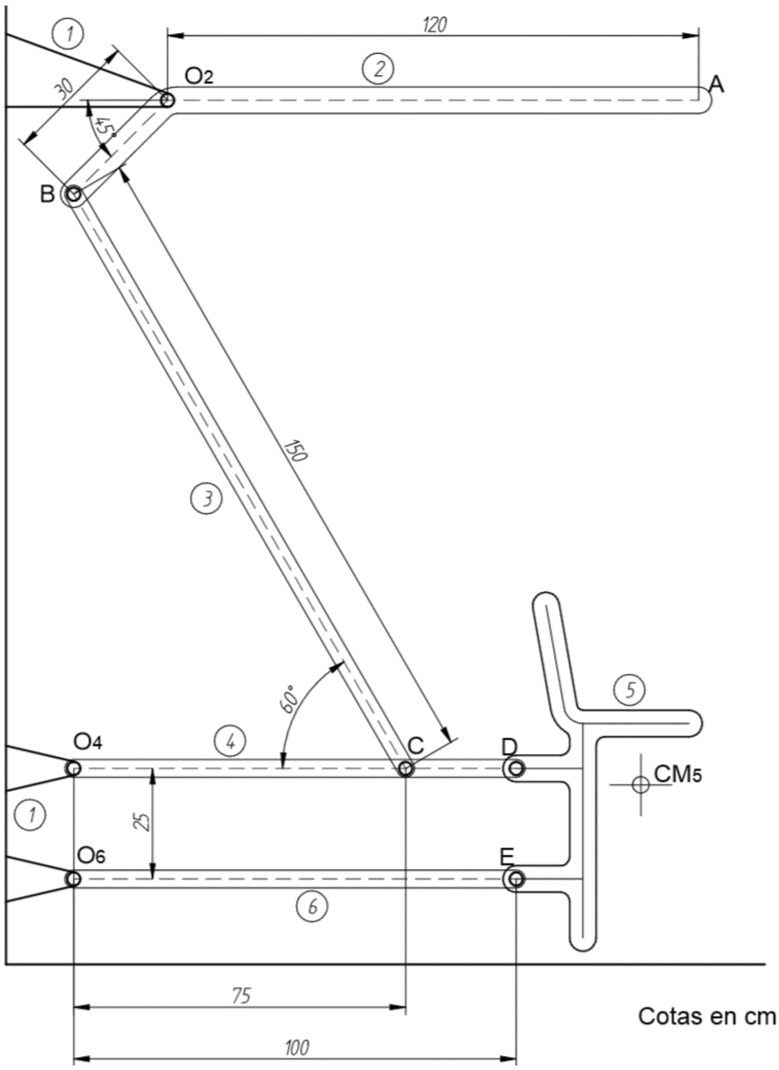
Utilizando el croquis del aparato gimnástico representado (cotas en cm), se pide:

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el mecanismo? (1 punto)

b) En la posición del croquis, si el extremo A de la manivela de acción (2) tiene una velocidad uniforme de 2 m/s hacia abajo, calcular la velocidad y aceleración del eslabón (5) asiento. (4 puntos)

c) Si el asiento tiene una masa m_5 = 8 kg y el resto de eslabones tiene masa despreciable, calcular la fuerza reducida en el punto A. (3 puntos)

d) En estas condiciones, calcular el par necesario sobre la manivela de acción para mantener el sistema en equilibrio en la posición indicada en el croquis. (2 puntos)



Cotas en cm

SOLUCIÓN:

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el mecanismo? (1 punto)

Aplicando el criterio de Grübler para mecanismos planos

$$G = 3(N-1) - 2f_1 - f_2$$

Donde N es el número de eslabones, f1 el número de pares cinemáticos de un grado de libertad y f2 el número de pares cinemáticos de dos grados de libertad.

$$G = 3(6-1) - 2 \cdot 7 - 0 = 1$$

El mecanismo tiene **1 grado de libertad**

b) En la posición del croquis, si el extremo A de la manivela de acción (2) tiene una velocidad uniforme de 2 m/s hacia abajo, calcular la velocidad y aceleración del eslabón (5) asiento. (4 puntos)

Eslabón 2:

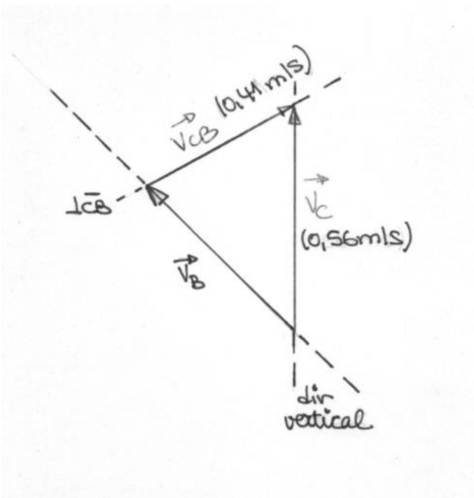
$\omega_2 = \frac{V_A}{O_2A} = \frac{2m/s}{1,2m} = 1,67\ rad/seg$ en sentido horario

$V_B = \omega_2 \cdot O_2B = 1,67 \cdot 0,3 = 0,5\ m/s$ vector con dirección perpendicular a O_2B y sentido acorde con ω_2

Eslabón 3:

$\overrightarrow{V_C}(dir.\ vertical) = \overrightarrow{V_B}(vector\ conocido) + \overrightarrow{V_{CB}}(dir. \perp CB)$

Podemos resolver gráficamente la ecuación vectorial:



$$V_C = 0,56 \frac{m}{s},$$
$$dir\ vertical$$
$$sentido\ hacia\ arriba$$

El valor de la velocidad del eslabón 5 coincide con el del punto D (pues todo el eslabón realiza un movimiento de traslación). Dicho punto puede obtenerse por homología.

$$V_5 = V_D = \frac{V_C}{O_4C} \cdot O_4D = \frac{0,56 \frac{m}{s}}{75} \cdot 100 = 0,76 \frac{m}{s}, dir\ vertical, sentido\ hacia\ arriba$$

Eslabón 2: al ser la velocidad del eslabón 2 uniforme, la aceleración de los puntos del mismo sólo tendrá componente normal.

$a_B = a_B^n = \omega_2^2 \cdot O_2B = 1,67^2 \cdot 0,3 = 0,84\ m/s^2$, vector con dirección paralela a O_2B y sentido de *B* hacia O_2.

Eslabón 3:

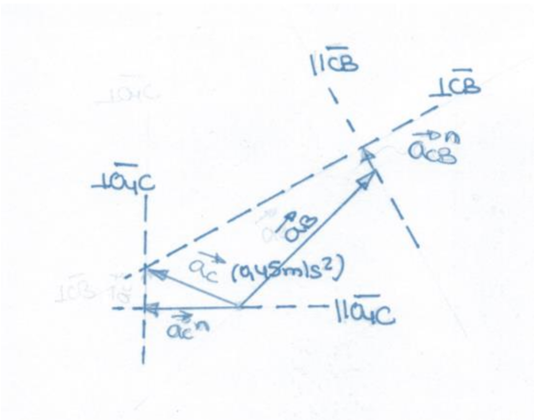
$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_B}(vector\ conocido) + \overrightarrow{a_{CB}}(dir.\perp CB)$

$\overrightarrow{a_C^n} + \overrightarrow{a_C^t}(dir.\perp O_4B) = \overrightarrow{a_B}(vector\ conocido) + \overrightarrow{a_{CB}^n} + \overrightarrow{a_{CB}^t}(dir.\perp CB)$

$\left|\overrightarrow{a_{CB}^n}\right| = \frac{V_{CB}^2}{CB} = \frac{0{,}41^2}{1{,}5} = 0{,}112\ m/s^2$ con dirección || a CB y sentido de C hacia B.

$\left|\overrightarrow{a_C^n}\right| = \frac{V_C^2}{O_4C} = \frac{0{,}56^2}{0{,}75} = 0{,}42\ m/s^2$ con dirección || a O_4C y sentido de C hacia O_4.

Podemos resolver gráficamente la ecuación vectorial:



$$a_C = 0{,}45\frac{m}{s^2},$$
$$dir\ y\ sentido\ según\ el\ dibujo$$

El valor de la aceleración del eslabón 5 coincide con el del punto D (pues todo el eslabón realiza un movimiento de traslación). Dicho punto puede obtenerse por homología.

$$a_5 = a_D = \frac{a_C}{O_4C}\cdot O_4D = \frac{0{,}45\frac{m}{s^2}}{75}\cdot 100 = 0{,}6\ \frac{m}{s^2}, dir\ vertical\ y\ sentido\ idéntico\ a\ a_C$$

c) Si el asiento tiene una masa m_5 = 8 kg y el resto de eslabones tiene masa despreciable, calcular la fuerza reducida en el punto A. (3 puntos)

Podemos resolverlo aplicando el principio de los trabajos virtuales.

Fuerzas externas:

$$P_5 = m_5\cdot g = 8\cdot 9{,}8 = 78{,}4\ N\ dirección\ vertical\ y\ sentido\ hacia\ abajo$$

Fuerzas de inercia:

$$F_{i5} = m_5\cdot a_5 = 8\cdot 0{,}6 = 4{,}8\ N\ misma\ dirección\ que\ a_5\ y\ sentido\ contrario$$

$$-\overrightarrow{F_A}\cdot\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{F_{i5}}\cdot\overrightarrow{V_5} + \overrightarrow{P_5}\cdot\overrightarrow{V_5} = 0$$
$$-F_A\cdot 2 + 4{,}8\cdot 0{,}76\cdot\cos(112°) + 78{,}4\cdot 0{,}76\cdot(-1) = 0$$

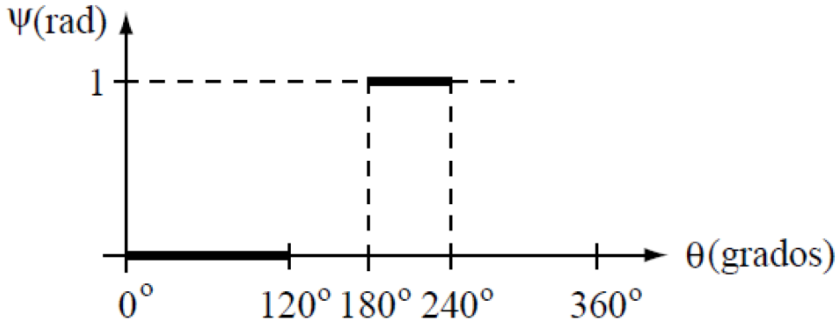
$F_A = 30{,}48\ N$ dirección vertical y sentido contrario a V_A

d) En estas condiciones, calcular el par necesario sobre la manivela de acción para mantener el sistema en equilibrio en la posición indicada en el croquis. (2 puntos)

$M_2 = F_A\cdot O_2A = 30{,}48\cdot 1{,}2 = 36{,}6\ Nm$ sentido horario.

PROBLEMA 2.

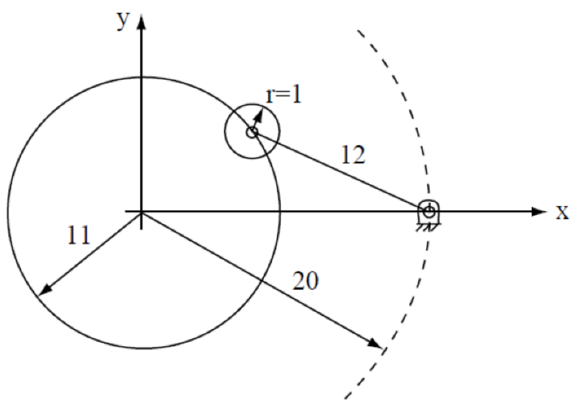
Se pretende diseñar una leva de rotación plana con seguidor oscilante de rodillo, que verifique el diagrama de desplazamiento que se muestra en la figura.



Para conectar los tramos horizontales se utilizarán funciones que garanticen continuidad en posición, velocidad y aceleración. En este caso, se tomarán funciones cicloidales.

a) Obtener las expresiones analíticas de los tramos de avance (2 puntos) y descenso (2 puntos), así como sus derivadas con respecto al ángulo de giro de la leva, θ (2 puntos).

Para el diseño de la leva, se adoptarán los parámetros de partida que se indican en la figura.



b) Dibujar sobre la figura anterior, de manera aproximada el perfil de la leva, utilizando la tabla que se incluye (4 puntos).

θ (°)	0	120	130	140	150	160	170	180	240	260	280	300	320	340	360
Ψ (°)															

SOLUCIÓN:

a) Obtener las expresiones analíticas de los tramos de avance (2 puntos) y descenso (2 puntos), así como sus derivadas con respecto al ángulo de giro de la leva, θ (2 puntos).

La función cicloidal se define de la forma

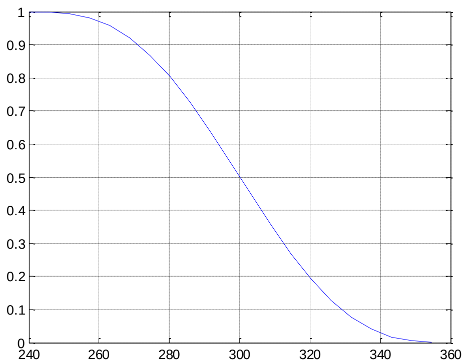
$S = L_i + L\left[\frac{\theta-\theta_0}{\beta} - \frac{1}{2\pi} sen\left(\frac{2\pi(\theta-\theta_0)}{\beta}\right)\right]$ (con ángulos en rad)

<u>tramo de avance</u> [120, 180], $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, L_i = 0, L = 1$

$$\Psi = \frac{3}{\pi}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2\pi} sen\left(6\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Psi' = \frac{3}{\pi}\left[1 - cos\left(6\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]$$

<u>tramo de retroceso</u> [240, 360], $\theta_0 = \frac{4\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}, L_i = 1, L = -1$



$$\Psi = 1 - 1\left[\frac{\theta - \frac{4\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2\pi} sen\left(\frac{2\pi\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)}{\frac{2\pi}{3}}\right)\right]$$

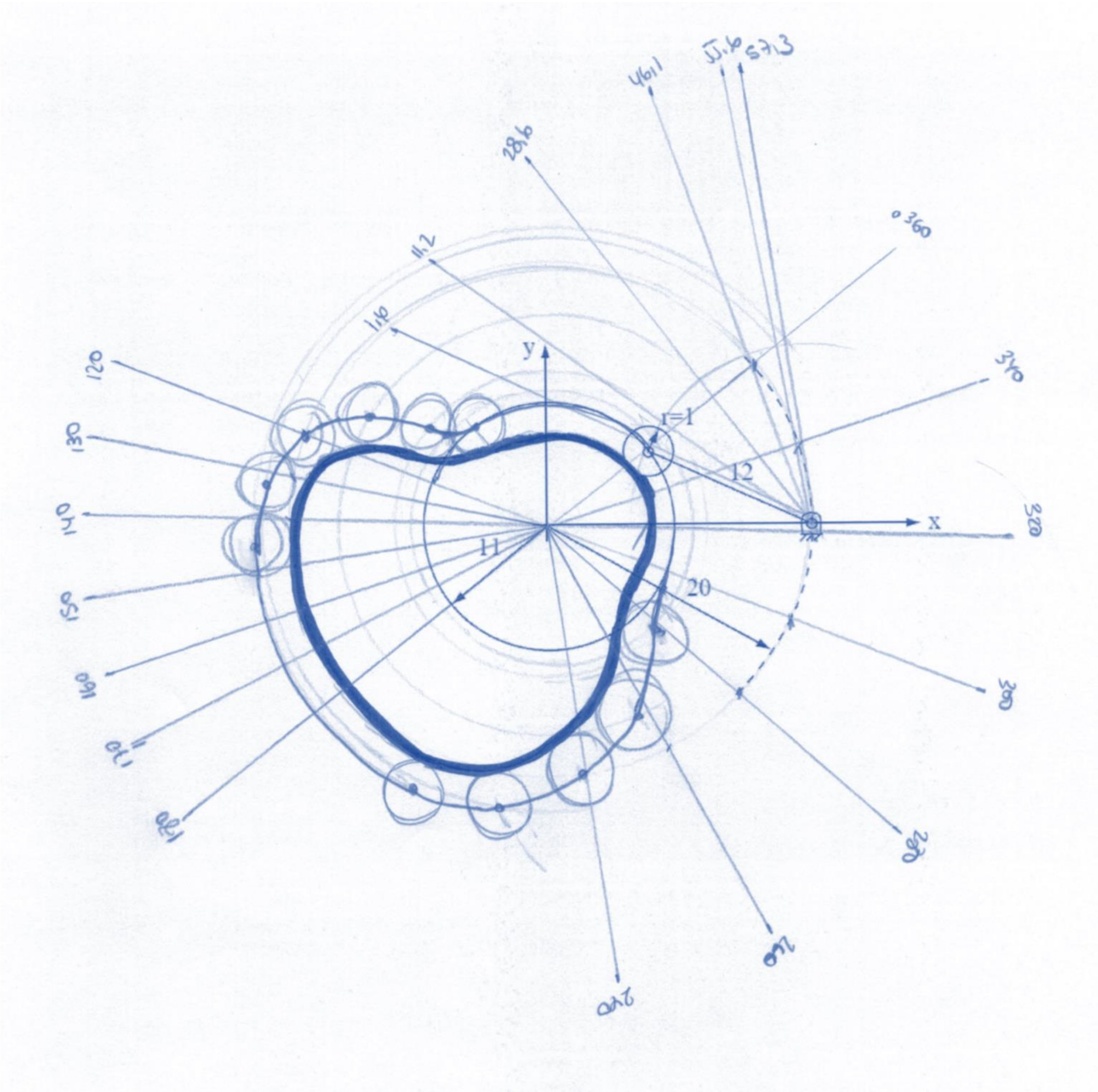
$$\Psi = 1 - \frac{3}{2\pi}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\pi} sen\left(3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Psi' = -\frac{3}{2\pi}\left[1 - \frac{3}{2\pi} cos\left(3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right)\right]$$

b) Dibujar sobre la figura anterior, de manera aproximada el perfil de la leva, utilizando la tabla que se incluye (4 puntos).

θ (°)	0	120	130	140	150	160	170	180	240	260	280	300	320	340	360
Ψ (°)	0	0	1,65	11,20	28,65	46,09	55,64	57,30	57,30	55,64	46,09	28,65	11,20	1,65	0

Considerando el sentido de giro de la leva horario durante su movimiento, su perfil sería como en el dibujo.



PROBLEMA 3.

Una reductora industrial es un tren de engranajes ordinario y recurrente que presenta una relación de transmisión total m = 1/16, repartida en dos grupos reductores normalizados (α = 20°) con igual relación de transmisión, cuyo primer grupo reductor dispone de un piñón de 15 dientes y un módulo m_1 = 6 mm. y cuyo segundo grupo reductor tiene un módulo m_2 = 5 mm.

Debido a los esfuerzos soportados por los dientes, se sustituye el primer grupo reductor por otro que tiene la misma relación de transmisión y la misma distancia entre ejes pero con un nuevo módulo m_1' = 9 mm., un nuevo piñón de 10 dientes y una nueva rueda.

Se pide:

A) El número de dientes de los engranajes de la reductora antes de la modificación. (2 puntos)

B) Especificar qué tipo de talla y de montaje hay que realizar en los engranajes de la reductora del primer grupo reductor modificado (el de módulo m_1' = 9 mm.) para, además de cumplir las especificaciones citadas, no haya penetración en la talla ni holgura circunferencial o penetración tras el montaje. (2 puntos)

C) Acotar la geometría del par (el del punto B), indicando los siguientes valores (6 puntos):

Para cada rueda:

	Piñón	Rueda
Número de dientes (Z)		
Módulo (m) (mm)		
Ángulo de presión de referencia (a) (º)		
Factor de desplazamiento (x)		
Desplazamiento en la talla (mm)		
Radio primitivo de referencia (r) (mm)		
Radio primitivo de funcionamiento (r’) (mm)		
Radio base (r_b) (mm)		
Radio de cabeza (r_c) (mm)		
Radio de pie (r_f) (mm)		
Paso (p) (mm)		
Hueco (e) (mm)		
Espesor (s) (mm)		

Para la pareja de ruedas:

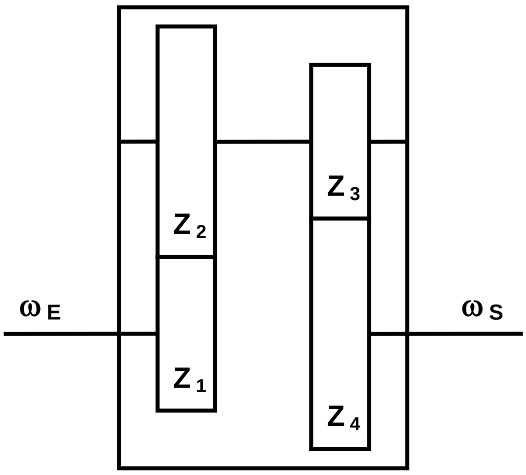
Ángulo de presión de funcionamiento (a’) (º)	
Distancia entre ejes de funcionamiento (a’) (mm)	
Holgura radial en el montaje (mm)	

SOLUCIÓN:

A) La reductora presenta una relación de transmisión $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 = 1/16$, con las dos relaciones de transmisión parciales iguales, luego $\mu_1 = \mu_2 = 1/4$.

En el primer grupo reductor, el piñón dispone de Z_1 = 15 dientes y como la relación de transmisión es $\mu_1 = Z_1 / Z_2 = 1/4$, entonces Z_2 = 60 dientes.

Si el número de dientes de las ruedas del segundo grupo reductor son $\mathbf{Z_3}$ y $\mathbf{Z_4}$, siendo el tren ordinario recurrente con una distancia entre ejes **a**, se cumple que:



$$a = r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

$$a = \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) = \frac{m_2}{2} \cdot (Z_3 + Z_4)$$

Como además es conocida la relación de transmisión parcial μ_2 = 1/4, se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{2} \cdot (15 + 60) = \dfrac{5}{2} \cdot (Z_3 + Z_4) \\ \\ \mu_2 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{Z_3}{Z_4} \end{cases}$$

Cuya solución es $\mathbf{Z_3}$ = 18 y $\mathbf{Z_4}$ = 72 dientes.

B) Especificar qué tipo de talla y de montaje hay que realizar en los engranajes de la reductora del primer grupo reductor modificado (el de módulo m_1' = 9 mm.) para, además de cumplir las especificaciones citadas, no haya penetración en la talla ni holgura circunferencial o penetración tras el montaje. (2 puntos)

El primer grupo reductor modificado presentará un piñón de 10 dientes y como la relación de transmisión parcial permanece constante $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{Z_1'} / \mathbf{Z_2'} = 1/4$, entonces $\mathbf{Z_2'}$ = 40 dientes.

El hecho de que la distancia entre ejes permanece constante, obliga a realizar un montaje a cero (lo cual es factible pues $\mathbf{Z_1' + Z_2' > 28}$), tallando en V con un ángulo de presión de referencia α = 20 º y un módulo m = 9:

- El piñón de 10 dientes se talla con desplazamiento positivo de 36/17 mm.
- La rueda de 40 dientes se talla con desplazamiento negativo de 36/17 mm.

C) Los valores obtenidos para los parámetros pedidos se resumen en la siguiente tabla:

	Piñón	**Rueda**
Número de dientes (Z)	10	40
Módulo (m) (mm)	9	9
Ángulo de presión de referencia (α) (º)	20	20
Factor de desplazamiento (x)	0,2353	-0,2353
Desplazamiento en la talla (mm)	2,1176	-2,1176
Radio primitivo de referencia (r) (mm)	45	180
Radio primitivo de funcionamiento (r') (mm)	45	180
Radio base (r_b) (mm)	42,29	169,14
Radio de cabeza (r_c) (mm)	56,12	186,88
Radio de pie (r_f) (mm)	35,87	166,63
Paso (p) (mm)	28,27	28,27
Hueco (e) (mm)	12,59	15,68
Espesor (s) (mm)	15,68	12,59

Ángulo de presión de funcionamiento (α') (º)	20
Distancia entre ejes de funcionamiento (a') (mm)	225
Holgura radial en el montaje (mm)	2,25

Siendo:

Factor de desplazamiento	$x = \frac{14 - Z}{17}$	**Radio base**	$r_b = r \cdot \cos\alpha$
Desplazamiento en la talla en V	$m \cdot x$	**Radio de cabeza**	$r_c = r + m \cdot (1 + x)$
Módulo	$m = \frac{2 \cdot r}{Z}$	**Radio de pie**	$r_f = r - m \cdot (1{,}25 - x)$
Paso	$p = m \cdot \pi$	**Hueco**	$e = \frac{p}{2} - 2 \cdot m \cdot x \cdot tg\alpha$
Distancia entre ejes	$a = r_1 + r_2$	**Espesor**	$s = \frac{p}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot tg\alpha$

En los montajes a cero, ciertos parámetros de referencia y funcionamiento son iguales. Esto ocurre con los radios primitivos, el ángulo de contacto y la distancia entre ejes.

La holgura radial se extrae restándole a la distancia entre ejes de funcionamiento el radio de cabeza de una de las ruedas y el radio de pie de la otra:

$$\text{Holgura radial} = a' - (r_{c1} + r_{f2}) = a' - (r_{c2} + r_{f1})$$

En este caso, al ser un montaje a cero, la holgura radial también se puede calcular a partir del juego de cabeza normalizado, como:

$$\text{Holgura radial} = c = 0{,}25 \cdot m = 0{,}25 \cdot 9 = 2{,}25\,\text{mm}.$$

1ª Olimpiada Nacional en

TEORÍA DE MÁQUINAS
Y MECANISMOS

15-16 Octubre, 2015, Madrid, España

OTM2 2015

PROBLEMA 4.

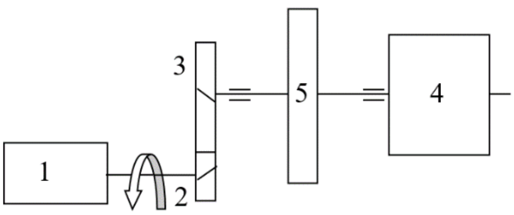
La figura representa el esquema de una máquina, donde el accionamiento de la carga (4) se realiza con un motor eléctrico (1) y una transmisión de engranaje (2-3). Sobre el eje de la carga se dispone también un volante de inercia (5). La curva de par resistente de la carga se representa en la figura frente al ángulo de giro de su eje. El motor suministra un par constante a lo largo de ciclo. La máquina funciona en régimen permanente con los siguientes datos:

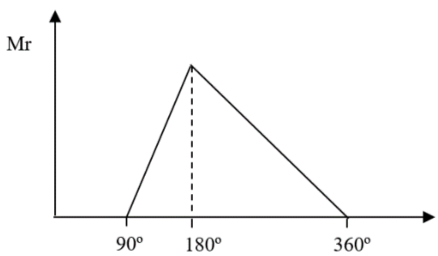
- Potencia: 100 kW
- Frecuencia de giro del eje del motor: 2950 rpm
- Grado de irregularidad cíclica: 0,5 %.
- Inercia total del motor, transmisión y carga reducida al eje de la carga: 0,1 kgm^2

El engranaje 2-3 es cilíndrico helicoidal y el número de dientes de las ruedas es z_2= 20 y z_3=50.

Se pide:

a) Velocidad máxima y mínima que alcanza el eje de la carga. (2 puntos)
b) Par resistente máximo. (2 puntos)
c) Ángulos de velocidad máxima y mínima. (2 puntos)
d) Inercia total del sistema. (2 puntos)
e) Inercia del volante. (2 puntos)





SOLUCION:

Datos:

Frecuencia de giro del motor:

$\omega_2 = 2950 \cdot \text{rpm}$

Irregularidad cíclica:

$\delta = 0.005$

Potencia:

$H = 100 \cdot \text{kW}$

Inercia de la máquina excepto el volante reducida al eje de la carga:

$I = 0.1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Dientes del engranaje:

$z_2 = 20$

$z_3 = 50$

a) Velocidad máxima y mínima del eje de la carga

Velocidad media del eje de la carga:

$$\omega_4 = \omega_2 \cdot \frac{z_2}{z_3} = 123.569 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}$$

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

Y operando con ambas ecuaciones:

$$2 \cdot \omega_{max} = 2 \cdot \omega_{med} + \omega_{med} \cdot \delta$$

$$\omega_{max} = \omega_{med} \cdot \frac{(2 + \delta)}{2}$$

Por tanto la velocidad máxima y mínima del eje de la carga es:

$$\omega_{4\_max} = \omega_4 \cdot \frac{(2 + \delta)}{2} = 123.878 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{4\_min} = 2 \cdot \omega_4 - \omega_{4\_max} = 123.26 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Inercia del volante:

Si el sistema funciona en régimen el par motor constante es:

$$M_m = \frac{H}{\omega_2} = 323.705 \cdot N \cdot m$$

Dicho par en el eje de la carga es:

$$M_{m4} = M_m \cdot \frac{z_3}{z_2} = 809.262\, N \cdot m$$

Por equilibrio energético en un ciclo, igualando áreas en diagrama par-ángulo:

$$M_{m4} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{2} M_r \cdot \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

de donde se deduce que el par resistente máximo (para ángulo 180º):

$$M_{r\_max} = M_{m4} \cdot \frac{8}{3} = 2.158 \times 10^3 \cdot N \cdot m$$

El instante de velocidad máxima será en el corte de la curva de par motor horizontal y la línea ascendente del par resistente, y se obtiene por semejanza de triángulos:

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 2.16 \cdot rad$$

El instante de velocidad mínima será el corte de la curva de par motor horizontal y la línea descendente del par resistente.

$$\theta_{min} = 2 \cdot \pi - \frac{3}{8} \cdot (2 \cdot \pi - \pi) = 5.105 \cdot rad$$

El trabajo neto entre el punto de velocidad mínima y velocidad máxima es:

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \left(M_{r\_max} - M_{m4} \right) \cdot \left(\theta_{min} - \theta_{max} \right) = 1.986 \times 10^3\, J$$

La relación entre la inercia total, el grado de irregularidad y el trabajo neto entre el punto de velocidad mínima (A) y el de velocidad máxima (B) es:

$$I_{tot} = \frac{W_{AB}}{\delta \cdot \omega_m^2}$$

De donde se deduce la inercia total del sistema:

$$I_{tot} = \frac{W_{AB}}{\delta \cdot \omega_4^2} = 26.016 \cdot kg \cdot m^2$$

La inercia del volante, por tanto, deduciendo la del resto del sistema, será:

$$I_v = I_{tot} - I = 25.916 \cdot kg \cdot m^2$$